

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $A = \left(\frac{x^{10}}{x^7} \right)^5 : \left(\frac{x^{-3}}{x^{-1}} \right)^{-7}$

ii. $B = \frac{28x^{10}y^{-3}}{8(x^3y^2)^2}$

iii. Αν $x = -\frac{1}{3}$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\Gamma = \left[\frac{(x^5 : x^3)^4}{(x^{-9} : x^{-11})^3} \right]^{-2}$$

iv. Αν $x = 2021$, $y = \frac{1}{2021}$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\Delta = \left[(x^{-1} \cdot y)^{-3} \cdot (x^5 \cdot y^4)^2 \right] : \left(\frac{x}{y^3} \right)^2$$

2. Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

ii. $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$

iii. $\alpha(\alpha - 2) - (\alpha - 1)^2 = -1$

iv. $(2\gamma - \delta)(2\gamma + \delta) - (\gamma + \delta)^2 - (\delta - \gamma)^2 = 2\gamma^2 - 3\delta^2$

3. Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha^2 - 3)^2 - \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 5) = (\alpha - 1)(\alpha^3 - 5) + 4$

ii. $(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha + 1)(\beta + 1)$

iii. $(\alpha^2 + \alpha - 1)^2 + 3\alpha^2 = (\alpha^2 + 1)^2 - 2\alpha(1 - \alpha)(\alpha + 1)$

iv. $(\kappa^3 + 1)^2 - (\kappa^2 + 1)^3 = (2\kappa)^3 - 3\kappa^2(\kappa + 1)^2$

4. Να αποδείξετε ότι:

- i. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = -2\alpha\beta$
- ii. Αν $\alpha - \beta = 2$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 3\alpha^2 = \beta^3 + 3\beta^2 - 4$
- iii. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $\gamma^2 - \alpha(\alpha + 2\beta) = \beta^2$
- iv. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 3$, και $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 7$$

5. Αν ισχύει ότι: $(\alpha + \beta)^2 - 2\beta(\alpha + \beta) = 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 = \beta^2$
- ii. Να προσδιορίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \alpha^{2020} - \beta^{2020}$

6. Να αποδείξετε ότι:

- i. Αν $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε: $\beta \neq 2$
- ii. Αν α ακέραιος αριθμός και α^2 είναι περιττός να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός:
- iii. Αν ο αριθμός $\alpha^2 + 2\alpha$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι και ο α είναι άρτιος.
- iv. Αν ο αριθμός $(\alpha + 2\beta + 1)^2$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι και ο α είναι περιττός.

7.

- i. Να αποδείξετε ότι η πρόταση « για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$ » δεν είναι αληθής.
- ii. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι: $\alpha > \frac{1}{\alpha}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iii. Για κάθε $\alpha < 9$ ισχύει ότι: $\alpha^2 < 81$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iv. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι: $\alpha^3 > \alpha^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



8. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- i. $(3\alpha^3 - \dots)^2 = \dots - \dots + 16\beta^2$

- ii. $(6\alpha + \dots)(\dots - 36\alpha\beta^2 + \dots) = \dots$
 iii. $(2x^2 - \dots)^2 = \dots - 2x^5 + \dots$
 iv. $(\dots + \dots)(9x^2 - \dots + 4y^2) = \dots$
 v.

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $2\alpha x - 4\alpha y$

ii. $\alpha^2 x - \alpha^3 x^2$

iv. $12\alpha\beta^2 - 9\beta^2\alpha^2 + 3\alpha^3\beta^3 + 18\alpha^2\beta^4$

iii. $2\alpha x - 4\alpha y - 6\alpha^2 xy$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $2\alpha\beta - \beta^2 + 6\alpha - 3\beta$

ii. $2xy - 4y + 5x - 10 + 2xz - 4z$

iii. $15\alpha^3 x^2 - 6\alpha^2 x^2 + 10\alpha xy - 4xy$

iv. $5x^2\alpha + 1 - x^2 - 5\alpha$

11. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $9x^2 - \frac{25}{4}$

ii. $(2x-1)^2 - 4x^2$

iii. $x^3 - 256x$

iv. $(2x-1)(x+3) - x^3 + 9$

12. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $8x^3 - 27y^3$

ii. $(2x-1)^3 - x^3$

iii. $\alpha x^4 - \alpha^4 x$

iv. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $4x^2 - 4x + 1$

ii. $a^4 + 14a^2 + 49$

iii. $16a^2 + 9 + 24a$

iv. $a^2 - \beta^2 + 6\beta - 9$

v. $4x^3 - x^2 - 4x^4$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις .

i. $x^2 - 5x + 6$

ii. $x^2 + x - 2$

iii. $x^2 + 7x + 12$

iv. $-x^2 + 8x - 16$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $x^4 + 4$

ii. $x^4 + 4y^4$

iii. $x^4 + 9y^2 - 10x^2 y$

iv. $x(x^2 + 9y) - 9y(x - 3y^2)$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $(3x-1)^3 + (x-2)^3 + (3-4x)^3$

ii. $27(x-2)^3 + 8x^3 - (5x-6)^3$

iii. $8(2x-3y)^3 + (2x+y)^3 - (6x-5y)^3$

iv. $a^3(\beta-\gamma)^3 + \beta^3(\gamma-\alpha)^3 + \gamma^3(\alpha-\beta)^3$



17. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{x^2 - 2x + 1 - y^2}{x^2 - xy - x}$

ii. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} : \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{-3}$

iii. $(\alpha - \beta)^2 (\alpha^{-1} - \beta^{-1})^{-2}$
 iv. $\frac{-6x - 3a}{ax - a^2} : \frac{9x^2 - 4a^2}{x - a}$
 $\frac{2x + a}{3ax + 2a^2}$

18. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta(1+\gamma)}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$$

19. Αν ισχύει: $12x^2y + 18xy^2 = 2x + 3y$, $x, y \neq 0$, Να δείξετε ότι οι αριθμοί $2x$, $3y$ είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

20. Αν $\nu \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι ο αριθμός $5^\nu + 5^{\nu+1} + 5^{\nu+2}$ διαιρείται με το 31.

21. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\left(\frac{356}{999}\right)^3 + \left(\frac{643}{999}\right)^3}{\left(\frac{356}{999} - \frac{643}{999}\right)^2 + \frac{356 \cdot 643}{999^2}}$